数理解析研究所講究録
第 896 巻 1995 年 63-70

いろいろな代数系のバーンサイド環とその応用

小田文仁・吉田知行
熊本大学 理学部 数学科

1 はじめに

有限群論では、バーンサイド環の有用性は次第に増している。有限群のバーンサイド環は置換表現のなす環であり、はじめ有限群の置換表現に関して登場し (L.Solomon 1968)、その後 Artin 型の induction 定理の一般論に応用された (A.Dress 1971)。さらにシローの定理、群上の方程式に関する Frobenius の定理、K.Brown のホモロジー論的シローの定理の別証や拡張に使われた。

このようなバーンサイド環の理論の成功を見ると、有限群以外の他の代数系に対しても同様の理論が展開できるのではないかと考えるのは自然であろう。例えばコンパクトリー群に対してはそのような理論ができている。ここでは群に似た代数系に対してバーンサイド環もどきを構成してみる。

2 抽象バーンサイド環

以下では Γ を有限カテゴリー、すなわち Γ の対象と射全体は有限集合をなすものとする。(skeletally finite category でも良い。)

$$\Gamma(x,y) := \mathrm{Hom}_{\Gamma}(x,y)$$

と置く。Γ の対象の同型類の集合 $\mathrm{Obj}(\Gamma)/\cong$ を単に $\Gamma/\cong$ とも書く。次のふたつの仮定を考える。

(F) 任意の射 $f: x \longrightarrow y$ は、一意的 epi–mono 分解を持つ:

$$(x \xrightarrow{f} y) = (x \xrightarrow{e} \mathrm{im}(f) \xrightarrow{m} y).$$

ここで e は epi で、m は mono、$\mathrm{im}(f)$ は f によって定まる対象である。分解の一意性とは、もし $x \xrightarrow{e'} i' \xrightarrow{m'} y$ がもう一つの f の分解なら、ある同型 $\alpha: \mathrm{im}(f) \longrightarrow i'$ が存在して、$e' = \alpha e, m = m'\alpha$ となることを意味する。

(C) 任意の対象 x とその自己同型射 σ に対し、余等化図式

$$x \underset{1}{\overset{\sigma}{\rightrightarrows}} x \longrightarrow x/\sigma$$

が存在する。

例: 有限群 G に対し、可移 G-集合 (の同型類) と G-写像のカテゴリー Γ は条件 (F) と (C) を満たす。このカテゴリーではすべての射は epi なので、条件 (F) は自明である。x/σ は G-集合 x における σ-軌道全体の集合である。実際、$x = G/H$ で、$\sigma = gH \in WH \cong \mathrm{Aut}_G(G/H)$ のとき、x/σ は $G/\langle g\rangle H$ である。

例: 有限集合と写像のカテゴリー、有限 (アーベル) 群と準同型写像のカテゴリー、有限グラフとグラフ準同型写像のカテゴリーは上のふたつの条件 (F) と (C) を満たす。これらは有限カテゴリーではないが、位数がある数以下の対象の同型類全体を取れば有限カテゴリーになる。

$\boldsymbol{Z}\Gamma$ を、対象の同型類全体の (有限) 集合 $\mathrm{Obj}(\Gamma)/\cong$ を基底とする自由加群とする。また $\boldsymbol{Z}^\Gamma$ を、$\mathrm{Obj}(\Gamma)/\cong$ 上の整数値関数全体のなす環とする。この環を、直積環 $\prod_i \boldsymbol{Z}$ と同一視する。ここで i は $\Gamma/\cong$ 上を動く。このときバーンサイド準同型

$$\begin{array}{rcccc} \varphi := (\varphi_i) & : & \boldsymbol{Z}\Gamma & \longrightarrow & \boldsymbol{Z}^\Gamma \\ & ; & x(\in\Gamma) & \longmapsto & (|\Gamma(i,x)|)_i \end{array}$$

があり、obstruction の群 $\mathrm{Obs}(\Gamma)$ を

$$\mathrm{Obs}(\Gamma) := \prod_{i\in\Gamma/\cong} (\boldsymbol{Z}/|\mathrm{Aut(i)}|\boldsymbol{Z})$$

で定義すると、CFB-写像

$$\begin{array}{rcccc} \psi := (\psi_i) & : & \boldsymbol{Z}^\Gamma & \longrightarrow & \mathrm{Obs}(\Gamma) \\ & ; & \chi & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathrm{Aut}(i)} \chi(i/\sigma)\right)_i \end{array}$$

が得られる。CFB は、Cauchy-Frobenius-Burnside の名前から取った。

抽象バーンサイド環の基本定理:

(1) $0 \longrightarrow \boldsymbol{Z}\Gamma \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{Z}^\Gamma \xrightarrow{\psi} \mathrm{Obs}(\Gamma) \longrightarrow 0$

は加群の完全系列である。

(2) $\boldsymbol{Z}\Gamma$ は、φ を環準同型写像とするようなただ一つの単位的可換環構造を持つ。

この定理の環 $\boldsymbol{Z}\Gamma$ を**抽象バーンサイド環** (ABR) と呼ぶ。

注: 素数 p に対し、条件 (C) の代りに次の条件を考える:

$(\mathrm{C})_p$ 任意の $x \in \Gamma$ と 位数 p の自己同型 σ に対し、1_x と σ との余等化 x/σ が存在する。

この条件のもとでも似た定理が証明できて、特に $\boldsymbol{Z}_{(p)}\Gamma$ は環構造を持つ。ここで $\boldsymbol{Z}_{(p)}$ は p-進整数の環である (完備でなくてもよい)。

系: 条件 (F) と (C) を満たす有限カテゴリーにおいて、次の条件は同値である:

(a) $x \cong y$;

(b) 任意の $i \in \Gamma$ に対し、$|\Gamma(i,x)| = |\Gamma(i,y)|$;

(c) 任意の $i \in \Gamma$ に対し、$|\Gamma(x,i)| = |\Gamma(y,i)|$.

例: G が有限群で、Γ が可移 G-集合の場合、$\boldsymbol{Z}\Gamma$ は普通のバーンサイド環である。$\mathfrak{X}$ が G の部分群の族で、共役に関して閉じており、さらに素数 p に関する条件:

$(\mathrm{C})_p \quad H \in \mathfrak{X}, g \in N_G(H), g^p \in H \quad \Longrightarrow H\langle g\rangle \in \mathfrak{X}$

を満たすとする。Γ を可移 G-集合で、一点の固定部分群が $\mathfrak{X}$ に属するようなもののなすカテゴリーとする。このとき、$\Omega(G,\mathfrak{X})_p := \boldsymbol{Z}_{(p)}\Gamma$ は環構造を持つ。これを一般バーンサイド環と呼ぶ。

例: 有限グラフのカテゴリーを考える。このカテゴリーは条件 (F) と (C) を満たし、したがってそれから ABR ができる。基本定理の系から有名なグラフの同型判定が得られる。

3　ベキ等元公式とその応用

抽象バーンサイド環 (ABR) の原始べき等元の具体的公式を得ることは可能である。簡単のため Γ は skeletal と仮定する ($x \cong y \quad \Longrightarrow \quad x = y$)。まず有理数体上の ABR $\boldsymbol{Q}\Gamma$ の場合を考える。

$$\varphi : \boldsymbol{Q}\Gamma \xrightarrow{\cong} \boldsymbol{Q}^{\Gamma}$$

だから、$t \in \Gamma$ に対応する原始べき等元 e_t は、$\varphi(e_t) = (\delta_{it})_i$ を満たし、したがって Hom-set 行列 $H = (|\Gamma(i,j)|)$ の逆行列を使って

$$e_t = \sum_{i\in\Gamma} H^{-1}_{it} i$$

と表わせる。そこで逆行列 H^{-1} を求めればよい。

Γ が可移 G-集合の場合には、ABR $\boldsymbol{Z}\Gamma$ は普通のバーンサイド環であり、したがって $\boldsymbol{Q}\Gamma$ の原始べき等元が部分群束のメビウス関数を用いて表現できる。一般の ABR の場合も部分群束に相当するものを作る必要がある。話しを簡単にするため、さらに次の仮定を置く:

(E) Γ の射はすべて epi である。

この条件の無い場合も H^{-1} を求めることは可能であるし、実用的には (E) が成り立つとしても一般性を失わない事が解っている。

有限カテゴリー Γ の**有限離散 cofibration** とは、有限カテゴリー $\tilde{\Gamma}$ からの関手 $f:\tilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$ であって、次の図式が pull-back となることを言う:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}(\tilde{\Gamma}) & \xrightarrow{\mathrm{dom}} & \mathrm{Obj}(\tilde{\Gamma}) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathrm{Mor}(\Gamma) & \xrightarrow{\mathrm{dom}} & \mathrm{Obj}(\Gamma). \end{array}$$

これは次のようにも書ける:

任意の $\lambda : f(\tilde{x}) \longrightarrow y$ に対し、ただ一つの $\tilde{\lambda} : \tilde{x} \longrightarrow \tilde{y}$ が存在して、$f(\tilde{y})\Gamma y$ かつ $\lambda = f(\tilde{\lambda})$ を満たす。

Γ 上の有限離散 cofibration のカテゴリー $\mathbf{Cofib}/\Gamma$ と関手カテゴリー $[\Gamma, \mathbf{Set}_f]$ は同値である。対応は

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cofib}/\Gamma & \longleftrightarrow & [\Gamma, \mathbf{Set}_f] \\ (f:\tilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma) & \longmapsto & (i \longmapsto f^{-1}(i)) \\ (\coprod_i F(i) \longrightarrow \Gamma) & \longleftarrow & F \end{array}$$

で与えられる。

$f:\tilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$ を有限 skeletal カテゴリーの有限離散 cofibration とする。例えば、Γ が generator $g \in \Gamma$ を持つ場合は、Hom-set 関手 $H^g : i \longmapsto \Gamma(g,i)$ を取ればよい。Γ の射がすべて epi であるとの仮定のもとで、$\tilde{\Gamma}$ は quasi ordered set である。したがって、同形類の集合 $\overline{\Gamma} := \mathrm{Obj}(\tilde{\Gamma})/\cong$ は順序集合になる。そのメビウス関数を $\mu_{\overline{\Gamma}}$ とする。

定理: $t \in \Gamma$ に対応する $\boldsymbol{Q}\Gamma$ の原始べき等元は

$$e_t = \sum_{\overline{a} \in \overline{\Gamma}} \sum_{t' \in \overline{f}^{-1}(t)} \frac{\mu_{\overline{\Gamma}}(a,t')}{|\mathrm{Aut}(\overline{f}(\overline{a})| \cdot |\overline{f}^{-1}\overline{f}(a)|} \overline{f}(\overline{a})$$

で与えられる。

定義: 素数 p に対し、$\mathrm{Obj}(\Gamma)$ 上の同値関係 $\sim_p$ を、関係 $i/\sigma \sim_p i$ $(i \in \Gamma, \sigma \in (\mathrm{Aut}(i)_p)$ によって生成されたものとする。ここで $\mathrm{Aut}(i)_p$ は $\mathrm{Aut}(i)$ のシロー p-部分群である。なお $\mathrm{Aut}(i)_1 = 1$, $\mathrm{Aut}(i)_0 = \mathrm{Aut}(i)$ として、$\sim_p$ の定義を $p = 0, 1$ にまで拡張しておく。また $\boldsymbol{Z}_{(p)} := \{a/b \in \boldsymbol{Q} \mid (b,p) = 1\}$ とし、特に $\boldsymbol{Z}_{(0)} := \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_{(1)} := \boldsymbol{Q}$ と置く。

定理: $\boldsymbol{Z}_{(p)} \otimes \boldsymbol{Z}\Gamma$ の原始べき等元は

$$e^p_s := \sum_{s' \sim_p s} e_{s'}$$

の形をしている。

この定理からいろいろな合同式が得られる。例えば e_s^p における i の係数を計算することによって次を得る:

フロベニウスの定理の弱形: 条件 (F) と (C) を満たす (条件 (E) は不要) 有限カテゴリー Γ を取る。このとき任意の $s, i \in \Gamma$ に対し、

$$\sharp\{\sigma \in \mathrm{Aut}(i) \mid i/\sigma \sim_p s\} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ |\mathrm{Aut}(s)|_p).$$

例えば、可移 G-集合のカテゴリーの場合、

$$\sharp\{G \text{ の } p\text{-元}\} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ |G|_p)$$

が得られる。

4 可移 G-集合をどう定義するか

ふたつの条件 (F) と (C) を満たすカテゴリー Γ があれば、抽象バーンサイド環 $\boldsymbol{Z}\Gamma$ が定義でき、さらにべき等元公式や各種合同式が得られるとなると、具体的なカテゴリーに抽象バーンサイド環の理論を適用してみたくなる。問題は Γ として何を取るかである。有限 G-集合の場合を考えるなら、これは可移 G-集合に相当するものを以下に定義するかである。

いちいち結果は挙げないが、以下のようなカテゴリーに我々の理論を適用することは十分意味があると思われる。

(1) G を有限群とし、Γ として、可移 G-集合と G-写像のカテゴリーを取る。これは古典的な場合である。

(2) G を有限群、$\mathfrak{X}$ を G の部分群の族で、共役に関して閉じたものとする。G/H, $H \in \mathfrak{X}$ の形の G-集合と G-写像のカテゴリー Γ を考える。このカテゴリーにおいてすべての射は epi であり、したがって条件 (F) は成立している。条件 (C) の方は次の様に書きなおされる:

(C) $H \in \mathfrak{X}, g \in N_G(H)$ に対し、$H\langle g\rangle$ を含む最小の $\overline{H\langle g\rangle} \in \mathfrak{X}$ が存在する。

この条件を満たすカテゴリーからできる ABR が、一般バーンサイド環 $\Omega(G, \mathfrak{X})$ である。これについては [Yo 90] を参照のこと。

(3) 有限半順序集合 P をカテゴリーと見なす。このカテゴリーでは、$|P(x, y)| \leq 1$ となっている。特に各対象の自己同形は恒等射だけであり、したがって条件 (C) は無条

件で成立している。すべての射は epi かつ mono なので、条件 (F) は成立しない。それでも今の場合は $\varphi : \boldsymbol{Z}P \longrightarrow \boldsymbol{Z}^P$ は同形で、したがって $\boldsymbol{Z}P$ は ABR である。この ABR を組合わせ論ではメビウス環と呼んでいる。

(4) 量子群 (Hopf 代数) G に対する有限 G-集合を、G-加群であるような有限次元余代数として定義する。これからバーンサイド環も構成できるが、それが役に立つかどうかは知らない。

(5) 私は association scheme(以下 AS) について、ぼんやりとした演算を持つ群もどき、という統計学からのイメージを強く持っている。AS のパラメタ p_{ij}^k を x, y の積が z になる確率を表していると考えるのである。

実際 $G = \{a_0 = 1, g_1, \cdots, g_n\}$ が群のとき、

$$A_i := \{(x, y) \in G \times G \mid x^{-1}y = g_i\}$$

とすれば、$(G, \{A_i\})$ は (非可換な)AS になり、したがって AS は群の概念の拡張と見なせる。そうすると一般の AS についても作用の概念を定義したくなる。これについてもう少し詳しく述べよう。

有限集合 G 上の (非可換) AS $G = (G, \{A_i\}_{0 \leq i \leq d})$ は、以下の条件を満たすものとして定義される:

(a) $G \times G = \coprod_{i=0}^d A_i, \quad A_i \neq \emptyset$.
(b) $A_0 = \{(g, g) \mid g \in G\} (=: G^{\Delta})$
(c) 各 i に対し i' が存在して、$A_i{}^T = A_{i'}$ である。ここで $A_i{}^T := \{(h, g) \mid (g, h) \in A_i\}$ とした。
(d) 任意の i, j, k と $(x, z) \in A_k$ に対し、

$$p_{i,j}^k := \sharp\{y \in G \mid (x, y) \in A_i, \quad (y, z) \in A_j\}$$

は、i, j, k だけに依存し、$(x, z) \in A_k$ の取り方によらない。

関係 $A_i \subseteq G \times G$ を $G \times G$-型の行列の見なす:

$$(A_i)_{g,h} = \begin{cases} 1 & \text{if } (g, h) \in A_i \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

この行列を使うと、良く知られているように、AS の定義は次のように書き換えられる:

(a') $\displaystyle\sum_{i=0}^{d} A_i = J(\text{all 1-matrix});$
(b') $A_0 = I(\text{単位行列});$
(c') $A_i{}^T = A_{i'};$

(d') $A_iA_j = \sum_{i=0}^{d} p_{i,j}^k A_k.$

さてこのような AS $G = (G, \{A_i\}_{0\leq i\leq d})$ に対し、G-集合を以下の条件を満たす $X = (X, \{S_\alpha\}_{1\leq\alpha\leq e}), S_\alpha \neq \emptyset$ として定義する:

(i) $G \times X = \coprod_{\alpha=1}^{e} S_\alpha.$
(ii) 任意の α, β, i と $(g, x) \in S_\beta$ に対し、

$$\kappa_{i,\alpha}^{\beta} := \sharp\{h \in G \mid (g, h) \in A_i, (h, x) \in S_\alpha\}$$

は α, β, i だけに依存し、(g, x) の取り方によらない。
(iii) 任意の α, β, i と $(g, h) \in A_i$ に対し、

$$\lambda_{\alpha,\beta}^{i} := \sharp\{x \in X \mid (g, x) \in S_\alpha, (h, x) \in S_\beta\}$$

は α, β, i だけに依存し、(g, h) の取り方によらない。
(iv) $x, y \in X$ に対し、

$$\{g \in G \mid (g, x) \in S_\alpha\} = \{g \in G \mid (g, y) \in S_\alpha\}$$

がすべての α に対して成り立つなら、$x = y$ である。

S_α を $G \times X$-型の行列と考える:

$$(S_\alpha)_{g,x} = \begin{cases} 1 & \text{if } (g, x) \in S_\alpha \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

すると上の条件は次のように書き換えられる:

(i') $\sum_\alpha S_\alpha = J_{G\times X}(= \text{all 1-matrix});$
(ii') $A_iS_\alpha = \sum_\beta \kappa_{i,\alpha}^{b} etaS_\beta;$
(iii') $S_\alpha {S_\beta}^T = \sum_{i=0}^{d} \lambda_{\alpha,\beta}^{i} A_i;$
(iv') 任意の α に対し、S_α の x-列と y-列が等しいなら、$x = y$ である。

条件の (iv) と (iv') は付けたくないのだが、これを除くと可移 G-集合が無限個現われて都合が悪い。もっと良い定義があるかもしれない。これらの条件は AS の作用の概念をうまく定義しようとして出てきたものだが、今もう一度見てみると、条件 (i) と (iii) は AS 上の partial BIBD の概念を定義している (Dembowski の本)。また条件 (ii) は大阪教育大学の伊藤達郎氏による X-regurality の概念である。

G-集合 X が可移であるとは、任意の α に対し

$$S_\alpha \xrightarrow{\text{incl}} G \times X \xrightarrow{\text{pr}} X$$

が全射であることをいう。

すべての G-集合は可移 G-集合の disjoint union である。また可移 G-集合の同型類は有限個しかない。したがってバーンサイド環の理論を展開できる。もしかすると association scheme の組み合せ論的な側面と群論的な側面を結び付けるような理論があるかもしれない。

References

[Yo 87] T.Yoshida: On the Burnside rings of finite groups and finite categories, in "Commutative algebra and combinatorics "(Kyoto, 1985), Adv. Stud. Pure Math., **11**, North-Holland, 1987, 337–353,

[Yo 87] T.Yoshida: Fisher's inequality for block deshings with finite group action, *Journal of the Faculty of Science, Tokyo Univ.*, Sec. IA, **34** (1987), 513–544.

[Yo 90] T.Yoshida: The generalized Burnside ring of a finite group, *Hokkaido Mathematical Journal*, **19** (1990), 509–574.